Т. (Кошијев интегрални критеријум) Нека је ф-ја f ненегативна, монотона и непрекидна на $[1,+\infty)$. Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ конвергира акко конвергира интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

Т. (Даламберов критеријум) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима и нека је $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. Тада важи:

а) Ако је $\lambda<1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

б) Ако је $\lambda>1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

в) Ако је $\lambda=1$, конвергенцију морамо испитати на други начин.

Т. (Кошијев критеријум) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима и нека је $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. Тада важи:

а) Ако је $\lambda<1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

б) Ако је $\lambda>1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

в) Ако је $\lambda=1$, конвергенцију морамо испитати на други начин

Т. (Критеријум Рабе) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима и нека је $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lambda$. Тада важи:

а) Ако је $\lambda>1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

б) Ако је $\lambda<1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

в) Ако је $\lambda=1$, конвергенцију морамо испитати на други начин

Т. (Гаусов критеријум) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима и нека је $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\delta}}$, гдје је $|\gamma_n| \le c$ $\forall n\in N$, и $\delta>0$.

Тада важи

а) Ако је $\alpha>1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

б) Ако је $\alpha<1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

в) Ако је $\alpha=1$, тада:

i) ако је $\beta>1$ ред конвергира

ii) ако је $\beta\le 1$ ред дивергира

1. Испитати конвергенцију реда
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$$
Посматрамо ф-ју $f(x)=x^2e^{-x^3}$. Тада је $f(n)=n^2e^{-n^3}$.

Како је
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^2e^{-x^3}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^{A} x^2e^{-x^3}dx = \left[\begin{array}{l} x^3=t, \\ 3x^2dx=dt, \\ x^2dx=\frac{dt}{3}, \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 1 & A \\ t & 1 & A^3 \end{array}\right] =$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\int_1^{A^3} e^{-t}dt = \lim_{A\to+\infty} -e^{-t}\Big|_1^{A^3} = \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-A^3}+e^{-1}\right) = e^{-1}$$
Дакле, $\int_1^{+\infty} x^2e^{-x^3}dx$ конвергира. (*)

Поред тога, ф-ја f је ненегативна и непрекидна. (**), и како је
$$f'(x)=2xe^{-x^3}-3x^4e^{-x^3}=xe^{-x^3}(2-3x^3)<0 \text{ за } x\in(1,+\infty)$$ то је f монотоно опадајућа на $[1,+\infty)$ (***).

Из (*), (**) и (***), по Кошијевом интегралном критеријуму, закључујемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n^3}$ конвергира.

2. Испитати конвергенцију следећих ~~[illegible]~~ бројних редова:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \ a>0$

$$a_n=\frac{a^n}{n!}, \quad a_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\frac{a\cancel{a^n}\cdot\cancel{n!}}{\cancel{a^n}\cdot\cancel{(n+1)!}\,n+1}=\frac{a}{n+1}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0=\lambda$$
Како је $\lambda<1$, то по Даламберовом критеријуму ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ конвергира

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

$a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n \cdot n!}{n^n}} = \frac{\cancel{3^{n+1}}^{3} \cdot \cancel{(n+1)!}^{(n+1)} \cdot n^n}{\cancel{3^n} \cdot \cancel{n!} \, (n+1)^{\cancel{n+1}}} = \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 3 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} = \lambda$$

Како је $\lambda > 1$, то по Даламберовом критеријуму ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ дивергира.

3. Испитати конвергенцију следећих бројних редова:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$

$a_n = n^5 \cdot \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \cdot \frac{3n+2}{4n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \cdot \frac{3n+2}{4n+3} = 1^5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \lambda$$

Како је $\lambda < 1$, то по ~~Даламберовом~~ Кошијевом критеријуму ред $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$ конвергира.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$

$a_n = \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{n+5}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}} = \frac{3n}{n+5} \cdot \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+5}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+5}\left(\frac{n+3-1}{n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+5}\cdot\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{-(n+3)\cdot\frac{n}{-(n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+5}\cdot\left(1+\frac{1}{-(n+3)}\right)^{-(n+3)\cdot\left(\frac{-n}{n+3}\right)} =$$

$$= 3\cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+3}} = 3\cdot e^{-1} = \frac{3}{e} = \lambda$$

Како је $\lambda > 1$, то по Кошијевом критеријуму ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2} \text{ дивергира}$$

4. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

($n!! = n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot a$, $a=1 \vee a=2$ у зависности од тога да ли је n паран или непаран)

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}} = \frac{\overset{2n+1}{\cancel{(2n+1)!!}}\cdot\cancel{(2n)!!}}{\cancel{(2n-1)!!}\cdot\underset{2n+2}{\cancel{(2n+2)!!}}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2} = 1 \Rightarrow$$ Не можемо ништа закључити о конвергенцији бројног реда на основу Даламберовог критеријума

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{2n+2-2n-1}{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} = \lambda$$

Како је $\lambda < 1$, то по критеријуму Рабе ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \text{ дивергира}$$

5. Испитати конвергенцију бројног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{a})(2-\sqrt[3]{a})\cdot\ldots\cdot(2-\sqrt[n]{a}),\quad 0<a<\sqrt{2}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\cancel{(2-\sqrt{a})}\cancel{(2-\sqrt[3]{a})}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2-\sqrt[n]{a})}}{\cancel{(2-\sqrt{a})}\cancel{(2-\sqrt[3]{a})}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2-\sqrt[n]{a})}(2-\sqrt[n+1]{a})}=\frac{1}{2-\sqrt[n+1]{a}}$$

Даље, важи

Тејлоров развој ф-је e^x у околини тачке $x_0=0$

$$\sqrt[n+1]{a}=e^{\frac{\ln a}{n+1}}=1+\frac{\ln a}{n+1}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{\ln^2 a}{(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=1+\frac{\ln a}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{\ln^2 a}{n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

Тејлоров развој ф-је $\frac{1}{1-x}$ у околини тачке $x_0=0$

$$=1+\frac{\ln a}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln^2 a}{n^2}\left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=1+\frac{\ln a}{n}+\frac{1}{2}\frac{\ln^2 a}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{\ln a}{n}+\frac{\ln^2 a+o(1)}{2n^2}=$$

$$=\alpha+\frac{\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\delta}},\ \text{гдје је}\ \alpha=1,\ \beta=\ln a,\ \theta_n=\frac{\ln^2 a+o(1)}{2},\ \delta=1,$$

$|\theta_n|$ - ограничен

Како је $\alpha=1$, $\beta=\ln a<1$ (јер је $0<a<\sqrt{2}$), то по Гаусовом критеријуму ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{a})(2-\sqrt[3]{a})\cdot\ldots\cdot(2-\sqrt[n]{a})$$

конвергира.

Апсолутна и условна конвергенција бројних редова

Деф: За ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ кажемо да апсолутно конвергира ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Коментар: Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергира, тада конвергира и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обратно у општем случају не важи.

Деф: За ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ кажемо да условно конвергира ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ дивергира, а $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

1. Испитати апсолутну конвергенцију редова:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$

Коментар: Ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ је ред са ненегативним члановима, па за испитивање конвергенције можемо користити критеријуме везане за конвергенцију редова са ненегативним члановима!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,|\cos 2n|}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$$

Приметимо да је $\frac{(n+1)\cdot|\cos 2n|}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}} \le \frac{2n\cdot 1}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{2}{n^{\frac{4}{3}}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{4}{3}}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ конвергира $\left(\frac{4}{3} > 1\right)$, па по поредбеном критеријуму ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}} \right|$ конвергира $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$ апсолутно конвергира.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(n+1)^n}$$ ← ред са позитивним члановима

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(n+1)^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(2n+2)!!}{(n+2)^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+2)!!}{(n+2)^{n+1}}}{\frac{(2n)!!}{(n+1)^n}} = \frac{\overset{(2n+2)}{\cancel{(2n+2)!!}}\,(n+1)^n}{\cancel{(2n)!!}\cdot(n+2)^{n+1}} = \frac{(2n+2)\,(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{2\cdot(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} = \frac{2}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}} = \frac{2}{e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}} = \frac{2}{e^1} = \frac{2}{e} = \lambda$$

$\lambda < 1 \Rightarrow$ по Даламберовом критеријуму, ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(n+1)^n}$ конвергира, па ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$

Знакопромењиви редови

Деф: Ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$ за $\forall n \in \mathbb{N}$, назива се знакопромењивим редом.

Т. (Лајбницов критеријум) Ако је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ тада ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ конвергира.

1. Испитати конвергенцију редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \\ 0 \leq a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n \end{array}\right\} \underset{\text{критеријуму}}{\overset{\text{по Лајбницовом}}{\Longrightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ конвергира}$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$

$a_n = \frac{\ln^2 n}{n}$

Посматрамо ф-ју $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$. $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}(2-\ln x)$

$f'(x) < 0$ за $x > e^2 \Rightarrow f(x)\downarrow$ на $(e^2, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} = f(n+1) \leq f(n) = a_n$ за $n \geq e^2$

Поред тога, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x} \underset{Л.П.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{1} \underset{Л.П.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$

$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, па је $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Дакле, пошто је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ за $n \geq e^2$, то по Лајбницовом критеријуму ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$ конвергира.

Дирихлеов и Абелов критеријум за конвергенцију редова

Т. (Дирихлеов критеријум) Нека је $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ који монотоно тежи 0 (т.ј. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, и $a_{n+1} \geq a_n$ или $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$), и нека ~~је~~ низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничен (т.ј. $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |\sum_{k=1}^{n} b_k| \leq M$). Тада ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ конвергира.}$$

Т. (Абелов критеријум) Нека је $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотон и ограничен низ, и нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира. Тада ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ конвергира.}$$

1. Нека низ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно тежи 0. Доказати да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ конвергира за $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, а ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$ конвергира за $\alpha \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Означимо $B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha$, $C_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha$. Тада је

$$B_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad C_n = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

за $\alpha \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ (доказати индукцијом!)

Дакле, за $\alpha \neq 2m\pi$, $|B_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}$, $|C_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}$, па редови $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\alpha$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\alpha$ имају ограничен низ парцијалних сума. Поред тога, ~~ред~~ низ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно тежи нули, па по Дирихлеовом критеријуму редови

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha \text{ конвергирају.}$$

За $\alpha = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, важи $\cos n\alpha = 1$ и $\sin n\alpha = 0$ за $\forall n \in \mathbb{N}$.
Дакле, за $\alpha = 2m\pi$, ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$ конвергира, а

ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

може да конвергира или дивергира, у зависности од низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln(\ln(n+2))} \cdot \cos \frac{1}{n}$$

Посматрамо ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln(\ln(n+2))}$. Како је низ $\left\{\frac{1}{\ln(\ln(n+2))}\right\}_{n=1}^{\infty}$ монотон низ који тежи нули, по задатку 1. ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln(\ln(n+2))}$ конвергира. (*)

Поред тога, низ $\left\{\cos \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ је монотон и ограничен ($|\cos \frac{1}{n}| \leq 1$ $\forall n$ и $\cos x \nearrow$ на $[0, 1]$, па низ $\left\{\cos \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ опада). (**)

Из (*) и (**), по Абеловом критеријуму, закључујемо да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln(\ln(n+2))} \cdot \cos \frac{1}{n}$ конвергира.